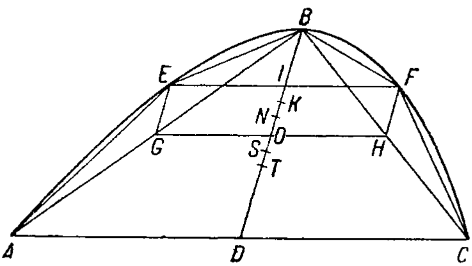
треугольника ACG в его естественном положении. Но так как расстояние центра тяжести треугольника ACG от AG равняется трети расстояния от нее точки C, то отсюда следует, что сегмент равен трети треугольника ACG или двум третям треугольника, образованного хордой и обеими касательными к концам ее. [В ходе своего доказательства Архимед воображает еще, что парабола как бы подвешена на другом конце равноплечего рычага, имеющего точку опоры в A].

Несмотря на всю строгость доказательства, Архимед присоединяет к нему еще исключительно изящное геометрическое доказательство. Пусть $AEBFC$ будет сегментом, а BD — диаметром, делящим пополам хорду AC. Впишем сперва в данный сегмент треугольник ABC, затем в получившиеся таким образом малые сегменты треугольники AEB и BFC, затем в дальнейшие новые сегменты соответствующие треугольники и т. д. Легко найти тогда, что каждый треугольник (как AEB) нового ряда треугольников равен $^1/_8$ треугольника (как ABC) предыдущего ряда, и так как в каждом новом ряду число треугольников вдвое больше, чем в предыдущем ряду, то имеем:



Фиг. 16.

$$\text{сегмент } ABC = \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ . \ . \ . \right] \triangle ABC = \frac{4}{3} \triangle ABC.$$

Доказательство дается здесь путем исчерпывания, как мы это указали по поводу двенадцатой книги Эвклида.

В то время как геометрическая квадратура параболы действительно опирается у Архимеда на суммирование бесконечного ряда, мы, с своей стороны, воспроизводя его *механическое* доказательство, воспользовались знаками интегралов для обозначения разложения на части, одновременно убывающие до бесконечности. Однако, строго говоря, нельзя прием Архимеда назвать интегрированием, ибо, в действительности, он служит для того, чтобы избегнуть интегрирования путем сведения искомой задачи к другой, результат которой, именно определение центра тяжести треугольника, найден уже раньше без интегрирования.

Но зато в трактатах „О спиралях" и „О коноидах и сфероидах" мы имеем дело с настоящими интегрированиями: действительно, Архимед доказывает здесь теоремы, в точности соответствующие нашим формулам:

$$\int^c x\,dx = \frac{1}{2}c^2 \text{ и } \int_0^c x^2\,dx = \frac{1}{3}c^3,$$